第 2 节 二项式系数与系数（★★☆）

强化训练

1.（2022 • 浙江三模 • ★）在二项式 $(x+2)^4$ 的展开式中，常数项是_____，二项式系数最大的项是_____.

答案：16，$24x^2$

解析：$(x+2)^4$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r x^{4-r}2^r=2^r\mathrm{C}_4^r x^{4-r}(r=0,1,2,3,4)$，

令 $4-r=0$ 可得 $r=4$，所以展开式中的常数项为 $T_5=2^4\mathrm{C}_4^4=16$；

要求二项式系数最大的项，应先找到最中间的是哪一项，

$(x+2)^4$ 的展开式共 5 项，最中间的是第 3 项，所以展开式中二项式系数最大的项是 $T_3=2^2\mathrm{C}_4^2x^2=24x^2$.

2.（2023 • 厦门模拟 • ★★）在 $(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中，只有第 5 项的二项式系数最大，则展开式中含 x^2 项的系数为_____.

答案：70

解析：只有第 5 项的二项式系数最大，说明 n 为偶数且第 5 项是最中间的一项，可由此求出 n，

展开式只有第 5 项的二项式系数最大 $\Rightarrow(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式共有 9 项，所以 $n=8$，

故该展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r x^{8-r}(-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^r=(-1)^r\mathrm{C}_8^r x^{8-\frac{3}{2}r}(r=0,1,2,\cdots,8)$，

令 $8-\dfrac{3}{2}r=2$ 可得 $r=4$，所以 $T_5=(-1)^4\mathrm{C}_8^4x^2=70x^2$，故展开式中含 x^2 项的系数为 70.

3.（2022 • 全国模拟 • ★★）已知 $(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2x})^n$ 的展开式中第 5 项和第 6 项的二项式系数最大，则其展开式中的常数项为_____.

答案：$-\dfrac{21}{2}$

解析：给出了第 5 项和第 6 项的二项式系数最大，说明 n 为奇数且第 5 项和第 6 项都是中间项，可由此求 n，

展开式中第 5 项和第 6 项的二项式系数最大 $\Rightarrow$ 展开式共 10 项 $\Rightarrow n=9$，

所以展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_9^r(\sqrt{x})^{9-r}(-\dfrac{1}{2x})^r=(-\dfrac{1}{2})^r\mathrm{C}_9^r x^{\frac{9-3r}{2}}(r=0,1,2,\cdots,9)$，

令 $\dfrac{9-3r}{2}=0$ 可得 $r=3$，故展开式中的常数项为 $T_4=(-\dfrac{1}{2})^3\mathrm{C}_9^3=-\dfrac{21}{2}$.

4.（2022 • 兰州模拟 • ★★）已知 $(\dfrac{1}{x}-x)^n$ 的展开式中二项式系数的和是 1024，则它的展开式中的常数项是（　　）

（A）252　（B）-252　（C）210　（D）-210

答案：B

解析：给出二项式系数的和，可求出 n，再用通项求常数项，

由题意，展开式的二项式系数之和 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n=1024$，所以 $n=10$，

故展开式的通项 $T_{r+1}=C_{10}^r(\frac{1}{x})^{10-r}(-x)^r=(-1)^rC_{10}^rx^{2r-10}(r=0,1,2,\cdots,10)$，

令 $2r-10=0$ 可得 $r=5$，所以展开式中的常数项是 $T_6=(-1)^5C_{10}^5=-252$.

5．（2022·兰州模拟·★★）（多选）已知 $(x-2)^n$ 的展开式中偶数项的二项式系数之和为 128，则（　　）

（A） $n=8$

（B）展开式中各项系数之和为 1

（C）展开式的二项式系数之和为 256

（D）展开式的中间项为 $-1792x^3$

答案：ABC

解析：A 项，给出偶数项的二项式系数和，可由此求出 n，

由题意，展开式的偶数项二项式系数和 $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}=128$，所以 $n=8$，故 A 项正确；

B 项，求系数和用赋值法，在 $(x-2)^8$ 中令 $x=1$ 可得展开式中各项系数之和为 $(1-2)^8=1$，故 B 项正确；

C 项，展开式的二项式系数之和 $C_8^0+C_8^1+C_8^2+\cdots+C_8^8=2^8=256$，故 C 项正确；

D 项，$(x-2)^8$ 的展开式共有 9 项，中间项为 $T_5=C_8^4x^4(-2)^4=1120x^4$，故 D 项错误.

6．（2023·北京模拟·★★）若 $(2-x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$______.

答案：-127

解析：涉及系数和，用赋值法，在展开式中令 $x=0$ 可得 $a_0=2^7=128$，

令 $x=1$ 可得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=1$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_7=1-a_0=-127$.

7．（2023·南通模拟·★★）已知 $(3x-1)(x+1)^n$ 的展开式中所有项的系数和为 64，则展开式中含 x^2 的项的系数为（　　）

（A）25　（B）3　（C）5　（D）33

答案：C

解析：条件给出系数和，用赋值法，在 $(3x-1)(x+1)^n$ 中令 $x=1$ 可得其展开式所有项的系数和为 2^{n+1}，

由题意，$2^{n+1}=64$，所以 $n=5$，此时 $(3x-1)(x+1)^n=(3x-1)(x+1)^5=3x(x+1)^5-(x+1)^5$，

只要分别求出 $3x(x+1)^5$ 和 $(x+1)^5$ 这两部分中含 x^2 的项，再相减即可得到原式展开后的含 x^2 的项，

二项式 $(x+1)^5$ 的展开通项为 $T_{r+1}=C_5^rx^{5-r}(r=0,1,2,\cdots,5)$，

令 $5-r=1$ 可得 $r=4$，所以 $3x(x+1)^5$ 的含 x^2 的项为 $3xT_5=3xC_5^4x=15x^2$，

令 $5-r=2$ 可得 $r=3$，所以 $(x+1)^5$ 的含 x^2 的项为 $T_4=C_5^3x^2=10x^2$，故原式展开后含 x^2 项的系数为 $15-10=5$.

8．（2023·泰州模拟·★★★）若 $(x+y)^6=a_0y^6+a_1xy^5+a_2x^2y^4+\cdots+a_6x^6$，则 $(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2=$（　　）

（A）0　（B）32　（C）64　（D）128

答案：A

解析：该怎么赋值呢？所给式子涉及 x，y 两个字母，可先将 y 赋值为 1，化为我们熟悉的形式，

在 $(x+y)^6=a_0y^6+a_1xy^5+a_2x^2y^4+\cdots+a_6x^6$ 中令 $y=1$ 可得 $(x+1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$ ①，

观察发现所求式子涉及奇数项系数和与偶数项系数和，故再将 x 赋值为 1 和 -1，

在①中令 $x=1$ 可得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=2^6=64$ ②，

令 $x=-1$ 可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=0$ ③，

②+③可得 $2(a_0+a_2+a_4+a_6)=64$，所以 $a_0+a_2+a_4+a_6=32$，

②−③可得 $2(a_1+a_3+a_5)=64$，所以 $a_1+a_3+a_5=32$，故 $(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2=32^2-32^2=0$.

注：最后一题较难，学霸可尝试.

9.（2023 •江苏模拟 •★★★★）已知在 $(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中，第 5 项的系数与第 3 项的系数之比是 $56:3$，则展开式中系数的绝对值最大的是第（　）项.

（A）6　（B）8　（C）9　（D）11

答案：B

解析：由题意，$(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}(-\frac{2}{\sqrt[3]{x}})^r=(-2)^rC_n^rx^{\frac{3n-5r}{6}}\ (r=0,1,\cdots,n)$，

因为第 5 项的系数与第 3 项的系数之比是 $56:3$，所以 $\frac{(-2)^4C_n^4}{(-2)^2C_n^2}=\frac{56}{3}$，故 $\frac{4\cdot\frac{n!}{4!(n-4)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}}=\frac{56}{3}$，

化简得：$(n-2)(n-3)=56$，解得：$n=10$ 或 -5（舍去），所以 $T_{r+1}=(-2)^rC_{10}^rx^{\frac{30-5r}{6}}\ (r=0,1,\cdots,10)$，

要找系数绝对值最大的项，不妨设该项为 T_{k+1}，则该项系数的绝对值应不小于前一项 T_k 以及后一项 T_{k+2} 的系数的绝对值，故可由此建立不等式组，求解 k 的范围，

设 T_{k+1} 的系数的绝对值最大，则 $\begin{cases}\left|(-2)^kC_{10}^k\right|\ge\left|(-2)^{k-1}C_{10}^{k-1}\right|\\\left|(-2)^kC_{10}^k\right|\ge\left|(-2)^{k+1}C_{10}^{k+1}\right|\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}2C_{10}^k\ge C_{10}^{k-1}\\C_{10}^k\ge 2C_{10}^{k+1}\end{cases}$，从而 $\begin{cases}2\cdot\frac{10!}{k!(10-k)!}\ge\frac{10!}{(k-1)!(11-k)!}\\\frac{10!}{k!(10-k)!}\ge 2\cdot\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}\end{cases}$，

故 $\begin{cases}\frac{2}{k}\ge\frac{1}{11-k}\\\frac{1}{10-k}\ge\frac{2}{k+1}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}k\le\frac{22}{3}\\k\ge\frac{19}{3}\end{cases}$，故 $\frac{19}{3}\le k\le\frac{22}{3}$，

又 k 只能取整数，所以 $k=7$，故展开式中系数的绝对值最大的项是第 8 项.